Dirichlet核の同次変換 (ポテンシャル論における最大値の原理)

伊藤, 嘉房

数理解析研究所講究録
146巻 1972年 68-81

Dirichlet 核の同次変換

名大　医　伊藤嘉房

§1: 序

伊藤正之氏の講演抄録にあるようにDirichlet 核のフーリエ変換は逆数が局所可積分な対称負型函数の逆数であり，逆に逆数が局所可積分な対称負型函数の逆数のフーリエ逆変換はDirichlet核である．他方，負型函数は Lévy-Khinchine の式として表現され，逆に Lévy-Khinchine の式は負型函数を与える。したがってDirichlet 核・逆数が局所可積分な対称負型函数・逆数が局所可積分な対称な Lévy-Khinchine の式は 1：1：1 に対応している．それ故，Lévy-Khinchine の式の性質を調べることによって，Dirichlet核の性質を調べることが可能となる。この方法によって同次Dirichlet 核の性質を調べ，又 Dirichlet 核を Dirichlet核に変換するような同次変換を決定するのが以下の目的である。

以下すべてR^nでの話しである。したがってその旨を毎回は

ことわらない。又くどくどしい云い廻しをさけるために用語法を大旨次のようにきめておく。

楕円：等高線が楕円であるような核や函数を楕円核などと称する。

同次：例えば $\forall a > 0$ に対して，$f(ax) = a^{\alpha} f(x)$ となる函数を同次函数・α 次の同次函数などと称する。核や測度に対しても同称な云葉を用いる。同次核を同次核に移すような変換を同次変換と称する。

対称：以下に現われる楕円核・負型函数などは殆んどすべて原点に関して対称なので一々その旨をことわることはしない。

§ 2. Lévy-Khinchine の定理

<u>Définition</u>. R^n の連続函数 ψ が次の条件を満すとき，ψ は負型函数であると云う。

a') $\quad \psi(0) \geq 0, \qquad \psi(-x) = \overline{\psi(x)}.$

b) $\quad \varphi \in C_K^{\infty}, \qquad \int \varphi \, dx = 0$ に対して

$$\psi * \varphi * \check{\varphi}(0) \leq 0, \qquad \check{\varphi}(x) = \overline{\varphi(-x)}.$$

我々は Dirichlet 核を扱う立場にあるので対象を対称な負型函数にかぎってよいから，a') を次のようにしてよい。

$$\text{a)} \qquad \psi(0) \geqq 0, \qquad \psi(-x) = \psi(x).$$

ψ が real に限られるのは当然である.

Lévy-Khinchine の定理は a), b) の意味の負型函数 ψ が

$$\psi(x) = C + i\,l(x) + q(x) + \int \left(1 - \frac{i\,x\cdot y}{1+|y|^2} - e^{2\pi i\,x\cdot y}\right) d\sigma(y)$$

と分解され, 逆にこの表現をもつ函数が負型函数であることを云っている. こゝで $C \geqq 0$, $l(x)$ は実一次同次多項式, $q(x)$ は正型同次2次式, σ は $R^n - \{0\}$ 上の正の測度で

$$\int \frac{d\sigma(y)}{1+|y|^2} < +\infty$$

を満すものである.

我々の立場では Lévy-Khinchine の定理を次のように表現してよい。定理中の C, q は上記の如くであり, σ は上記の条件を満す上にさらに対称であるとしておく. 定理中の負型函数は a) と b) によって定義されるものとしておく.

<u>Théoreme 1.</u> ψ が R^n の函数であるとすると次は同値.

1) ψ は負型函数.

2) $\psi = C + q(x) + \int \left(1 - e^{2\pi i\,x\cdot y}\right) d\sigma(y).$

この定理の証明は通常 Semi-Group の理論を通して行なわれるようである[1]. しかしながら伊藤正之氏は直接的な証明を広い背景のもとで一般的な形で与えている[2]。その

証明から我々に必要な最小限をとり出して以下にまとめておく。

<u>定理1の証明の概略.</u> 1) ⇒ 2). R^nの超函数で$u = -\hat{\psi}$となるものが存在する. $\varphi \in C_k^\infty$とすると$\int D_i\varphi\, dx = 0$ ⇒ $0 \geqq \psi * (D_i\varphi) * (D_i\check{\varphi})(0) = -D_i^2(\psi * \varphi * \check{\varphi})(0)$ ⇒ $D_i^2\psi$ は type positive ⇒ $D_i^2\psi \in \mathcal{S}'$ ⇒ $\psi \in \mathcal{S}'$ であるから。

条件 b) をフーリエ変換すると$u(|\hat{\varphi}|^2) \geqq 0$ を得る. $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, $\hat{\varphi}(0) = 0$ に注意するとPを同次一次式とするときP^2uがR^nの正の超函数 ⇒ 正の測度となることがわかる。したがって, $\sigma = \frac{1}{|x|^2}\cdot|x|^2u$ は$R^n - \{0\}$の正の測度となる。$\mathrm{pf}\,\sigma$をσの有限部分とすると$\{0\}$以外でuと一致するから$S_{u-\mathrm{pf}\,\sigma} = \{0\}$. したがって

$$u - \mathrm{pf}\,\sigma = C\varepsilon + l\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varepsilon + q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varepsilon + r\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varepsilon$$

となる. こゝにおいてCは常数, l, qはそれぞれ同次1次, 2次の多項式, rは3次以上の項から成る多項式である. 条件 a) によって$l \equiv 0$. $r \equiv 0$も次のようにして云える. たとへば原点の近くで$\varphi_k = x_i^4$, $S_{\varphi_k} \longrightarrow \{0\}$となるような適当な$C_k^\infty$の元の列をとると$x_i^2(u - \mathrm{pf}\,\sigma)$が測度となることから$(u - \mathrm{pf}\,\sigma)(\varphi_k) \rightarrow 0$. したがって$\frac{\partial^4}{\partial x_i^4}$の係数は0とな

る．$p^2 pf\sigma = p^2\sigma$ は原点に charge しないので $p^2 u - p^2\sigma \geqq 0$．右辺をみると $q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots\cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) p^2 \geqq 0 \Rightarrow q \gg 0$．あと $\int_{|x|>1} d\sigma(x) < +\infty$ から之れは $C \geqq C$ はたいちにてる．$u = u_1 + \sigma_1$，たゞし u_1 は support が $\{|x| \leqq 1\}$ に入っている超函数，$\sigma_1 = \sigma\big|_{|x|>1}$，と書ける．$\hat{u} = -\psi$ および $\hat{u}_1$ は連続な函数であるから $\hat{\sigma}_1$ も連続．$\Rightarrow \hat{\sigma}_1(0) = \int_{|x|>1} d\sigma(x) < +\infty$．
2) $\Rightarrow$ 1) はさほどの困難をともなわない．　　　終り．

§3.　同次負型函数

$K(x)$ が R^n の次数 $\alpha - n$ の同次核とすると $\hat{K}(y)$ は次数 $-\alpha$ の同次核となる．したがって同次負型函数の形を求めることは同次 Dirichlet 核の形を求めることに直接つながる．

まず，Lévy - Khinchine の分解式の積分の項から2次以上の項がでないことを証明する．

<u>Lemme 1.</u>　σ が $R^n - \{0\}$ の測度で次の条件を満すとする．

$$\left|\int \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\, d\sigma(z)\right| < \infty.$$

このとき

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{|y|^2} \int \left(1 - e^{2\pi i y\cdot z}\right) d\sigma(z) = 0.$$

<u>証明.</u>　任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して次のようになる．

$$\frac{1}{|y|^2}\left|\int_{|z|<\delta}(1-e^{2\pi i y\cdot z})\,d\sigma(z)\right| \leqq 4\pi^2\int_{|z|<\delta}|z|^2 d|\sigma|(z) < \varepsilon.$$

他方,

$$\lim_{y\to\infty}\left|\frac{1}{|y|^2}\int_{|z|\geqq\delta}(1-e^{2\pi i y\cdot z})\,d\sigma(z)\right|$$

$$\leqq \lim_{y\to\infty}\frac{2}{|y|^2}\int_{|z|\geqq\delta}d|\sigma|(z) = 0.$$

終り.

この証明は [3] における lemme の証明を見習っている。

たゞちに次のことが云える。

Lemme 2. ψ が R^n の負型函数で同次２次ならば

$$\psi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, y_i\, y_j,$$

こゝで (a_{ij}) は正型である. 逆も成り立つ.

ついで同次楕円核のフーリェ変換が同次楕円核であることを証明する.

Lemme 3. K を R^n の核, A を $|A| \neq 0$ なる n 次元マトリックスとする.

$$K(x) = \frac{1}{(x^t A x)^{(n-\alpha)/2}} \qquad \text{pour} \quad x \in R^n - \{0\},$$

ならば

$$\hat{K}(y) = \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((\alpha-n)/2)}\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}-\alpha}}{\sqrt{|A|}}\,\frac{1}{(y^t A y)^{\alpha/2}} \quad \text{pour } y \in R^n - \{0\}.$$

証明. 次の様に書ける.

$$K(x) = \frac{1}{2^{n-\alpha-2}\,\Gamma((n-\alpha)/2)}\int_0^\infty e^{-x^t A x/2\delta^2}\,\delta^{-n+\alpha-1}\,d\delta.$$

こゝで $h(x) = e^{-x^t A x/2\delta^2}$ とおくと,

$$\hat{h}(y) = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{|A|}}\,\delta^n e^{-2\pi^2\delta^2 y^t A^{-1} y}.$$

したがって

$$\hat{K}(y) = \frac{2^{\frac{\alpha+2}{2}}}{\Gamma((n-\alpha)/2)}\sqrt{\frac{\pi^n}{|A|}}\int e^{-2\pi^2\delta^2 y^t A y}\,\delta^{\alpha-1}\,d\delta$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((n-\alpha)/2)}\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}-\alpha}}{\sqrt{|A|}}\,\frac{1}{(y^t A^{-1} y)^{\alpha/2}}.$$

終り.

Lemme 2 と 3 から次の定理を得る.

<u>Théorème 2.</u> K を $2-n$ 次の同次核とする. K が Dirichlet 核であるための必要充分条件は K が楕円核である事.

かように $2-n$ 次の同次 Dirichlet 核にはきついっ制約が加わる. しかしながら $\alpha-n$ 次の同次 Dirichlet 核に加わる制約は α が小さくなるにしたがって弱くなる. ひとまず同次 Dirichlet 核を得るための充分条件を定理 2 の系として与えておく.

<u>Corollaire.</u> $0<\alpha\leqq 2$ に対して $\alpha-n$ 次の同次楕円核は Dirichlet 核である.

α の範囲を限ったのは, Lévy-Khinchine の定理と Lemme 1 からたゞちにでるところの次の Lemme による.

<u>Lemme 4.</u> 同次負型函数の次数 α は, $0<\alpha\leqq 2$ に限られる.

系は次の一般論の特別の場合である.

<u>Théorème 3. (Beurling-Deny[4]).</u> Kが Dirichlet 核であるとき，$0<\alpha\leq 1$ に対して次のようなDirichlet核 hが存在する．

$$\hat{h} = \hat{K}^{\alpha}.$$

λ_α をα次の同次負型函数とするとき，$0<\alpha<2$ ならば，Lévy-Khinchine の定理とLemm 1によって

$$\lambda_\alpha(x) = \int (1 - e^{2\pi i x\cdot y})\, d\sigma_\alpha(y)$$

となることがわかる．σ_α は Lemm 1 の条件を満す正の測度でα次の同次負型函数をもたらすものとする．

<u>Lemme 5.</u> σ_α は $-n-\alpha$ 次である．

<u>証明.</u> 球座標を用いて

$$\lambda_\alpha(r,\theta) = \int (1 - e^{2\pi i r r' \theta\cdot\theta'})\, d\sigma_\alpha(r',\theta')$$

と書くことにする．$\theta\cdot\theta'$は単位ベクトルの内積とする．

$$\lambda_\alpha(ar,\theta) = \int (1 - e^{2\pi i a r r' \theta\cdot\theta'})\, d\sigma_\alpha(r',\theta')$$
$$= a^{-n}\int (1 - e^{2\pi i r r' \theta\cdot\theta'})\, d\sigma_\alpha\left(\frac{r'}{a},\theta'\right).$$

λ_α はα次同次であるから $a^\alpha\lambda_\alpha(r,\theta) = \lambda_\alpha(ar,\theta)$ である．上の式と較べればよい．　　　　終り．

このLemmeによってσ_α に対して単位球面上の正測度 C'_α があって

$$d\sigma_\alpha(r',\theta') = r'^{-\alpha-1}\, dr'\, dC'_\alpha(\theta)$$

となることがわかる．

逆に単位球面上に C'_α が与えられると上の式によって特異測度 σ_α が定まる．この特異測度に対応する α 次の同次負型函数は次の Lemme によって定まる．

Lemme 6. C'_α を単位球面上の測度とすると

$$\int (1 - e^{2\pi i r r' \theta\cdot\theta'}) r'^{-\alpha-1} dr' \, d C'_\alpha(\theta') = \frac{2^{\alpha-1}\pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}} \int |\theta\cdot\theta'|^\alpha d C'_\alpha(\theta) \cdot r^\alpha$$

たゞし $0 < \alpha < 2$ とする．

証明． 少し計算をすればよい．$0 < \alpha < 2$ のとき

$$\int_0^\infty \frac{\sin a r'}{r'^\alpha} dr' = \frac{\pi\, a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}$$

となるがこれを変形すれば次を得る．

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos a r'}{r'^{\alpha+1}} dr' = \frac{\pi\, a^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}},$$

こゝで $a = 2\pi r |\theta\cdot\theta'|$ とおけばよい． 終り．

以上を総合して次の定理を得る．

Théoreme 4. ψ が R^n の α 次 $(0 < \alpha \leq 2)$ の同次函数とする．ψ が負型函数ならば単位球面上の正測度 C' があって

$$\psi(r,\theta) = \int |\theta\cdot\theta'|^\alpha d C'(\theta') \cdot r^\alpha$$

となる．逆にC'を単位球面上の正測度とすると上式によって与えられる同次函数は負型である．

<u>証明.</u>　$0<\alpha<2$に対してはLemme 5と6を用いればよい．$\alpha=2$のときには$r^2\int|\theta\cdot\theta'|^2 dC'(\theta')$は楕円となるからLemme 2に帰着する．

<u>Théorème 5.</u>　KをR^nの$\alpha-n$次の同次函数とすると，KがDirichlet 核ならば$0<\alpha\leqq 2$であり，球面上の正測度Cが存在して

$$K(r,\theta)=\frac{1}{r^{n-\alpha}}\int\frac{d\rho(\theta')}{|\theta\cdot\theta'|^{n-\alpha}\int|\theta'\cdot\theta''|^{\alpha}dC(\theta'')}$$

と書ける．ρは単位球面上の一様測度である．

逆に任意の$0<\alpha\leqq 2$と，$r^{\alpha}\int|\theta'\cdot\theta''|^{\alpha}dC(\theta'')$の逆数を局所可積分とするような球面上の任意の正測度Cに対して，上式はDirichlet 核を与える．

<u>証明.</u>　フーリエ変換の計算をすればよい．

この§を終えるに際して，楕円でないDirichlet 核の例をあげておく．

<u>Exemple.</u>　$0<\alpha\leqq 2$，$C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n>0$とすると次によって与えられる核KはDirichlet核である．

$$\hat{K}(y)=\frac{1}{C_1|y_1|^{\alpha}+C_2|y_2|^{\alpha}+\cdots\cdots+C_n|y_n|^{\alpha}}.$$

実際，座標軸上にのみ乗っていてLemme 1 の条件を満す正の一次一 n 次の測度 σ があって

$$\sum_{i=1}^{n} c_i |y_i|^\alpha = \int (1 - e^{2\pi i y\cdot z}) d\sigma(z)$$

と書ける．$\hat{K}(y)$ が局所可積分であることは明らかである．

$0 < \alpha < 2$ のとき $\sum c_i |y_i|^\alpha$ は楕円ではないから Lemme 3 によってKも楕円でない．

§4. Dirichlet 核の同次変換.

$T = (t_{ij})_{i,j=1}^{n}$，$|T| \neq 0$ とする．$R^n \ni x \to Tx \in R^n$ が同次函数を，次数を変えないで，同次函数に変換することは明らかである．さらに次の事がいえる．

<u>Théorème 6.</u> Kが R^n のDirichlet 核ならば $K'(x) = K(Tx)$ も又然りである．

<u>証明.</u> Lévy - Khinchine の分解式から始める．$a \geq 0$，σ は Lemme 1 の条件を満す正測度，B は n 次元正型マトリックスとする．

$$\frac{1}{\hat{K}(y)} = a + y^t B y + \int (1 - e^{2\pi i x\cdot y}) d\sigma(z).$$

他方，

$$\int K'(x) e^{2\pi i x\cdot y} dx = \frac{1}{\|T\|} \int K(x') e^{2\pi i x'\cdot T^{-1} y} dx',$$

$x' = Tx$, $|T|$ はTの行列式の値である．それ故，

$$\frac{1}{\hat{K}'(y)} = \|T\|\Big[a + (T^{-1}y)^{t} B (T^{-1}y) + + \int \big(1 - e^{2\pi i (T^{-1}y)\cdot z}\big) d\sigma(z)\Big]$$

$$= \|T\|\Big[a + y^{t} B' y + \int \big(1 - e^{2\pi i y\cdot z'}\big) d\sigma(Tz')\Big],$$

こゝにおいて $B' = (T^{-1})^{t} B T^{-1}$, $z' = T^{-1} z$ である．$\sigma\cdot T$ は必要な条件を満す測度であるから $K(Tx)$ は Dirichlet 核である．　　　　終り．

かようにしてTは（必らずしも同次でない）Dirichlet核をDirichlet 核に変換するために，同次変換が満すべき充分条件の一つを与える．逆に同次変換Tが常にDirichlet 核をDirichlet 核に移すなら，Tは $|T| \neq 0$ なるマトリックスでなければならない．

<u>Théorème 7.</u>　Tが同次変換であるとすると次は同値である．

a)　$K(x)$ が Dirichlet核であるとき，$K(Tx)$ も然り．

b)　$K(x)$ が $2-n$ 次のDirichlet核であるとき，$K(Tx)$ も然り．

c)　Tは $|T| \neq 0$ なるマトリックスである．

<u>証明.</u>　定理をよくみると，楕円を楕円に移す同次変換がマ

トリックスに限られるといっているに過ぎないことがわかる．すなわち，a) ⇒ b) は明らかであり，c) ⇒ a) は定理6そのものである．b) ⇒ c) は上記の事柄のいい変えである．

$Tx = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$, $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ はお互いに線型独立であるとする．$1 \leqq i, j \leqq n$ に対して $f_i(x) \cdot f_j(x)$ は $(x_1, x_2 \cdots x_n)$ の同次2次式でなければならないから，$f_i(x)$ はすべて同次1次式でなければならない．$|T| \neq 0$ でなければならないことは明らかであろう．

終り．

§3と§4の約3分の2は[5]による．

以上．

参考文献

[1] P. Courrège: Génerateur Infinitésimal d'un semi-groupe de convolution sur R^n, et formule de Lévy-Khinchine. Bull. Sc. math., 2e série, 88, 3-30 (1964).

[2] M. Itô: Lecture note, Nagoya Univ., (1971).

[3] ――――: Sur les noyaux de Frostman-Kunugi et les noyau de Dirichlet. Ann.

Inst. Fourier (à paraître).

[4] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., 45, 208-215 (1959).

[5] Y. Ito: *Sur la transformation homogène du noyau de Dirichlet*. Proc. Jap. Acad., 47, 301-304 (1971).